

Раздел III. Колебания и волны.

Глава 5. Волны в упругих средах.

1. Общие понятия.

Среда называется упругой, если деформации, вызванные внешним воздействием, полностью исчезают после прекращения этого воздействия.

Закон Гука: малые упругие деформации прямо пропорциональны внешнему воздействию.

Волны в упругих средах – это распределенные в пространстве колебания среды.

Если частицы среды колеблются поперек направления распространения волны, то такие волны называются поперечными (колебания натянутой струны).

Если вдоль – продольными (звук в воздухе).

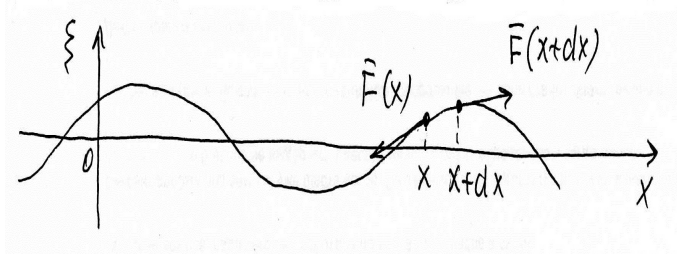
Продольные волны могут распространяться в любых упругих средах: твердых, жидких, газообразных.

Поперечные только в твердых, где возможна упругая деформация сдвига.

Вместе с колебаниями частиц среды в волнообразное движение приходят и другие характеристики среды такие, как скорость, плотность, температура...

Для описания волн используют величины, которые являются отклонениями какой-либо характеристики среды от среднего(равновесного) значения. Эти отклонения могут быть как скалярными $\xi(\vec{r}, t)$ (плотность, температура), так и векторными $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ (перемещение, скорость частиц среды)

2. Колебания натянутой струны.



II закон Ньютона для кусочка струны:

$$O_{\xi}: \underbrace{S \rho dx}_{dm} \underbrace{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}_{a_{\xi}} = F \left[\frac{\partial \xi(x+dx)}{\partial x} - \frac{\partial \xi(x)}{\partial x} \right]$$

$$\frac{S \rho}{F} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

⇓

ρ – плотность вещества струны

S – площадь сечения струны

F – сила натяжения

Волновое уравнение:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{V_{\phi}^2} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}}$$

где

$$V_{\phi} = \sqrt{\frac{F}{S\rho}} \quad \left[\frac{M}{c} \right] - \text{фазовая скорость}$$

Решение волнового уравнения в виде бегущих волн:

$$\xi_{\rightarrow, \leftarrow}(x, t) = a \cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{V_{\phi}}\right)\right]$$

a – амплитуда

$$\phi(x, t) = \omega\left(t \mp \frac{x}{V_{\phi}}\right) - \text{фаза}$$

ω - циклическая частота (задает генератор волны)

знак «-» волна распространяется вдоль $ox \rightarrow$

знак «+» волна распространяется против $ox \leftarrow$

Период T – время, за которое фаза меняется на 2π :

$$\phi(x, t+T) - \phi(x, t) = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Смысл фазовой скорости: скорость, с которой в пространстве перемещается точка с фиксированной фазой (в частности горбы и впадины). Величина не физическая, может превышать скорость света c .

Длина волны λ - расстояние, которое проходит волна за период:

$$\lambda = V_{\phi} T$$

Волновое число k :

$$k = \frac{\omega}{V_{\phi}}$$

С помощью волнового числа бегущие волны можно переписать в виде:

$$\xi_{\rightarrow, \leftarrow}(x, t) = a \cos(\omega t \mp kx)$$

Стойкие волны:

$$\xi_{cm}(x, t) = \frac{1}{2}(\xi_{\rightarrow} + \xi_{\leftarrow}) = a \cos \omega t \cos kx$$

3. Волновое уравнение в общем случае.

$$\frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial z^2} = \frac{1}{V_{\phi}^2} \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2}$$

Решение в виде бегущих волн:

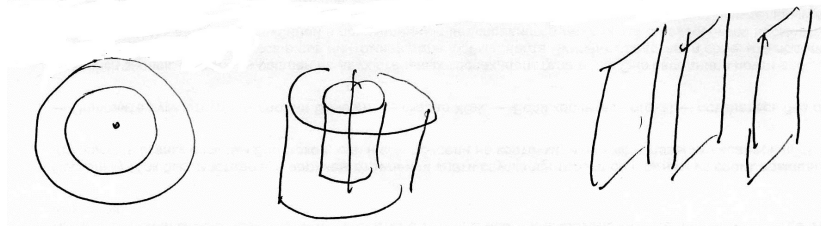
$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{a} \cos(\omega t \mp \vec{k}\vec{r})$$

$\vec{k}$ - волновой вектор, направленный по «-» или против «+» распространения волны.

$$k = \frac{\omega}{V_{\phi}}$$

Волновая поверхность – геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

Изображения волн с помощью волновых поверхностей:



сферические
волны

цилиндрические
волны

плоские волны

4. Фазовые скорости распространения различных волн упругости.

а) Поперечные волны в натянутой струне

$$V_{\phi} = \sqrt{\frac{F/S}{\rho}} \sim 10 - 1000 \frac{м}{с}$$

б) Продольные волны упругости в твердом теле (звук)

$$V_{\phi} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \sim 1000 - 5000 \frac{м}{с}$$

E – модуль Юнга. ($E \frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{S}$)

в) Продольные волны упругости в газах (звук):

$$V_{\phi} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

$\gamma = \frac{5}{3}$ одноатомный газ

$\gamma = \frac{7}{5}$ двухатомный газ (воздух)

p – давление газа

Звук в воздухе при нормальных условиях: $V_{\phi} \sim 330 \frac{м}{с}$

Нота «ля» 1 октавы: $\nu = 440 Гц$, $\lambda = V_{\phi} \frac{1}{\nu} = 0,75 м$

5. Энергия упругой волны.

В упругой волне частицы среды обладают как кинетической, так и потенциальной энергией.

В плоской волне:

$$\xi(x, t) = a \cos(\omega t - kx)$$

плотность полной энергии равна:

$$w = \rho \omega^2 a^2 \sin^2(\omega t - kx) \quad \left[\frac{Дж}{м^3} \right]$$

Усредненная по времени плотность энергии:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2$$

Для любых волн (не только упругих)

$$\langle w \rangle \sim \omega^2 a^2$$

Плотность потока энергии в бегущей волне:

$$\bar{q} = w \bar{V}_\phi \quad \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \text{с}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]$$

Энергия, переносимая волной через площадку единичной площади за единицу времени.

Вопросы.

1. Волновое уравнение и его решение в виде бегущих волн.
2. Что такое продольные и поперечные волны.
3. Что такое упругая среда.
4. Что такое фазовая скорость.
5. Что такое длина волны.
6. Что такое волновая поверхность.
7. Плотность энергии волны упругости.
8. Что такое плотность потока энергии волны.